CC2 - HAI205X Probas stats

2025

> Assurez-vous de présenter vos réponses de manière claire et lisible. Les exercices peuvent être traités dans le désordre. La calculatrice est autorisée. Les valeurs numériques seront arrondies à **deux décimales**. Le barême est donné à titre indicatif. Vous avez 1h10. Bon courage !

***One Piece* est un manga dont le premier tome est sorti en 1997. Il raconte les aventures de *Luffy* au chapeau de paille et de son équipage de pirates dont l'objectif principal est de trouver le fameux trésor du *One Piece.* Votre objectif est d'aider les membres de l'équipage pour les aider à mener à bien leur mission.**

Solution: Le correcteur pourra rajouter 1 point bonus pour la qualité de la copie et le respect des consignes (arrondies à deux décimales) + 1 point avec la dernière question de l'exercice 3.

Exercice 1 : Analyse des déplacements de Zoro (6 points)

Roronoa Zoro, le premier membre de l'équipage de Luffy, se perd très facilement, peu importe la situation.

Lors d'une mission sur une île mystérieuse, Luffy donne à Zoro un plan pour qu'il puisse rejoindre un point de rendez-vous précis. S'il suit correctement les indications de la carte, il a 70% de chances d'arriver au bon endroit. S'il interprète mal la carte (ce qui arrive 2 fois sur 5), alors il n'a que 20% de chances d'atteindre le point de rendez-vous par hasard.

1. (2 points) Modéliser cette expérience par un arbre en précisant la probabilité de chacune des branches.

   Solution: Voir Figure 1 (1 point pour l'arbre + 1 point pour les pondérations)

2. (2 points) Quelle est la probabilité que Zoro arrive au bon endroit ?

   Solution: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_C(B)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{\overline{C}}(B)\mathbb{P}(\overline{C}) = 0.5$ **(1 point pour le calcul explicite + 1 point pour la valeur numérique - Attention 0 si aucune justification)**

3. (2 points) Sachant que Zoro est arrivé au bon endroit, quelle est la probabilité qu'il ait correctement interprété la carte ?

   Solution: $\mathbb{P}_B(C) = \frac{\mathbb{P}(B\cap C)}{\mathbb{P}(B)} = 0.84$ **(1 point pour le calcul explicite + 1 point pour la valeur numérique - Attention 0 si aucune justification)**

Exercice 2 : Puissance des Fruits du Démon (5 points)

L'équipage du Chapeau de Paille s'intéresse à la puissance des pirates pour mieux évaluer leurs adversaires. On suppose que la puissance des possesseurs de Fruits du Démon suit une loi normale. On suppose que la puissance X d'un pirate, mesurée sur une échelle arbitraire, suit une loi normale de moyenne 500 et d'écart-type 100.

1. (2 points) Un pirate est considéré comme exceptionnellement puissant si sa puissance dépasse 650. Quelle est la probabilité qu'un pirate soit exceptionnellement puissant ?

   Solution: $\mathbb{P}(X > 650) = \mathbb{P}(X \leq 650) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1.5) = 0.0668$**, avec** $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ **(0.5 pour poser le problème avec X, 1 pour centré réduire, 0.5 pour lire le tableau et trouver la bonne valeur.)**

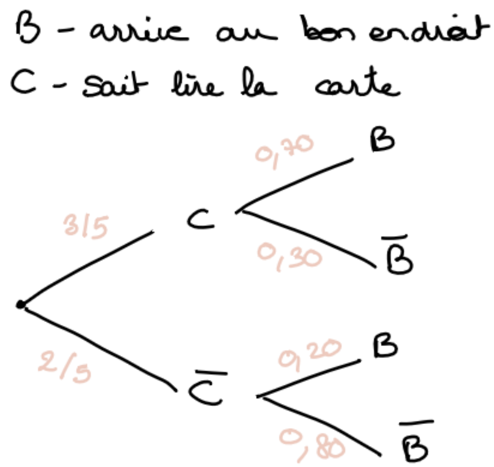

FIGURE 1 – Exercice 1 - question 1

2. (3 points) Un pirate peut devenir capitaine s'il fait partie des 10% les plus forts. Quelle est la puissance minimale d'un capitaine ?

   $\boxed{\textbf{Solution:}}$ $\mathbb{P}(X > x) = 0.1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y > \frac{x-500}{100}) = 0.1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y \leq \frac{x-500}{100}) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{x-500}{100} = 1.29 \Leftrightarrow x = 629$ **(0.5 pour poser le problème avec X + 1 pour centré réduire + 1 pour lire le tableau et trouver la bonne valeur + 0.5 pour résoudre l'équation finale)**

Exercice 3 : Le Virus Smile (9 points)

Dans l'univers de One Piece, le terrible Kaido et son équipage des cent bêtes utilisent un virus spécial appelé le Virus des Smile, qui affecte aléatoirement certains membres de son équipage en leur imposant un rire incontrôlable et permanent. On estime que la probabilité qu'un membre de l'équipage soit infecté par ce virus est 0,1. Le virus peut être détecté avec certitude par un test sanguin mis au point par le docteur Chopper. L'équipage étant composé de 100 personnes, Chopper doit trouver un moyen efficace de tester tout le monde sans gaspiller trop de ressources. Il décide d'utiliser une méthode de dépistage en groupe. Il forme, au hasard, 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des prélèvements sanguins par groupe de 10 personnes.

— Si le test est négatif, on considère que les 10 personnes sont saines et on est dispensé des 10 tests individuels.

— Si le test est positif, une personne au moins du groupe est atteinte de la maladie et il faut alors tester individuel- lement les 10 personnes du groupe. Dans ce cas on on doit donc effectuer au total 11 tests.

1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades dans un groupe de 10 personnes.
   (a) (2 points) Quelle est la loi de probabilité de Y ? Justifier la réponse.

   $\boxed{\textbf{Solution:}}$ **Loi Binomiale $\mathcal{B}(10, 0.1)$, 10 répétitions indépendantes avec 2 issues à chaque fois. (0.5 pour la loi + 0.5 pour les paramètres + 1 pour la justification de n répétitions indépendantes avec 2 issues à chaque fois.)**

   (b) (3 points) Calculer la probabilité pour que, dans un groupe, on observe au moins une personne malade.

   $\boxed{\textbf{Solution:}}$ $\mathbb{P}(Y > 0) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - 0.9^{10} = 0.651$ **(0.5 point pour exprimer Y + 1 point pour passer au complémentaire + 1 point pour la formule + 0.5 pour la valeur numérique)**

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de groupes pour lesquels le test global est positif.
   (a) (2 points) Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier la réponse.

Solution: **Loi Binomiale $\mathcal{B}(10, 0.651)$, 10 répétitions indépendantes avec 2 issues à chaque fois. (0.5 pour la loi + 0.5 pour les paramètres + 1 pour la justification de n répétitions indépendantes avec 2 issues à chaque fois.)**

(b) (2 points) Quelle est la probabilité que les 10 groupes aient un test global positif ?

Solution: $\mathbb{P}(X = 10) = \binom{10}{10}0.651^{10} = 0.0137$ **(0.5 point pour exprimer X+ 1 point pour la formule + 0.5 pour la valeur numérique)**

3. (bonus points) On considère la variable aléatoire N égale au nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition des 100 personnes.

(a) Justifier la relation $N = 10 + 10X$

Solution: **On fait 10 tests (mélange de 10 prélèvements) puis on fait à nouveau 10 tests SI le test global est positif donc $10X$ en fonction du nombre de groupe dont le test positif : $N = 10 + 10X$ (0.5 points bonus, à l'appréciation du correcteur.)**

(b) Calculer $P(N = 110)$

Solution: **Si $N = 110$ alors $X = 10$ donc $\mathbb{P}(N = 110) = \mathbb{P}(X = 10) = 0.0137$ (0.5 points bonus, à l'appréciation du correcteur.)**

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

FIGURE 2 – Table de la loi normale centrée réduite