CC 1 - Correction

Exercice 1

P_n : soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

- Initialisation : Soit $x \in \mathbb{R}^+$
  Pour $n = 0$, $(1+x)^0 = 1$
  et $1 + 0x = 1$.
  Donc P_0 est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, on suppose que P_n est vraie. On montre que P_{n+1} est vraie.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$

Par hypothèse de récurrence :

$(1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$

$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + nx + x + nx^2$

$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + x(n+1) + nx^2 \geqslant 1 + x(n+1)$

Donc $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$

Donc P_{n+1} est vraie

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$$

Soit $x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B$

$\iff x \notin A$ et $x \notin B$

$\iff x \in A^c$ et $x \in B^c$

$\iff x \in A^c \cap B^c$.

Exercice 3 :

Une course avec 20 concurrents dont Emilie :

1) 20 choix possible pour la 1^{er}, 19 pour la 2^e et 18 pour la 3^e :

$20 \times 19 \times 18$

2) 19×18

3) $3 \times 19 \times 18$

$= 20 \times 19 \times 18 - 19 \times 18 \times 17$